

<b>1. Einführung</b>	<b>2</b>
<b>2. Einfache Zufallsstichproben</b>	<b>3</b>
2.1 Charakterisierung einfacher Zufallsstichproben	3
2.2 Punktschätzung	4
2.3 Konfidenzschätzung (Fehlerrechnung i.e.S.)	5
2.4 Hypothesenprüfung (Testen)	5
2.5 Technische Varianten der Zufallsauswahl	6
<b>3. Höhere Stichprobenverfahren</b>	<b>7</b>
3.1 Gebundene Hochrechnungsverfahren	7
3.1.1 Grundidee	7
3.1.2 Differenzenschätzung	7
3.1.3 Verhältnisschätzung	8
3.1.4 Regressionsschätzung	8
3.2 Geschichtete Stichproben (Schichtung)	8
3.2.1 Grundidee	8
3.2.2 Proportionale Aufteilung	9
3.2.3 Optimale Aufteilung	9
3.2.4 Varianzvergleiche	9
3.3 Klumpenstichproben	9
3.4 Mehrstufige Stichproben	10
3.5 Stichproben mit variierender Auswahlwahrscheinlichkeit	10

# 1. Einführung

Stichprobenuntersuchungen im Rahmen primärstatistischer Erhebungen

- Ziel quantitativer Analysen ist die **Untersuchung von Verteilungen** (Verteilung als Ganzes, Verteilungstyp, Parameter der Verteilung) von **Untersuchungsmerkmalen**. Dazu müssen zunächst Daten per Befragung oder Beobachtung erhoben werden.
- Man unterscheidet **Vollerhebungen** und **Teilerhebungen (Stichprobenuntersuchungen)**. Stichproben sind die Basis aller inferenzstatistischen Verfahren.
- Bei **Querschnittserhebungen** wird eine bestimmte Gesamtheit zu einem Zeitpunkt betrachtet. **Längsschnitterhebungen** erheben eine Thematik über mehrere Zeiträume hinweg. Panels verknüpfen beide Varianten.

Mögliche Fehlerquellen

- Sowohl bei Voll- als auch bei Teilerhebungen können auftreten:
  - Rahmenfehler: fehlende Einheiten, Doppelerfassung, fälschliche erhobene Einheiten
  - Ausfälle der Angaben: Antwortverweigerung, nicht angetroffene Einheiten, Falschaussage
  - Fehler bei der Erhebung: Erhebungsdauer zu lang, Angabefehler, Aufzeichnungsfehler
  - Aufbereitungsfehler: Eingabefehler, Programmierfehler, Ausgabefehler, Tabellierungsfehler
- Daneben können nur bei Stichproben weitere Fehler nicht ausgeschlossen werden:
  - **Stichprobenzufallsfehler** (Stichprobenzufallsvarianz)
  - **Stichprobenverzerrung** (Bias): fehlerhafte Auswahl, verzerrte Auswahl, verzerrte Schätzung

Begriffsdefinitionen

- **Einheiten**
  - Untersuchungseinheit: Einheit, für die Merkmale erhoben werden
  - Erhebungseinheit: Einheit, die tatsächlich erhoben wird
  - Auswahlinheit: übergeordnete Einheit der Auswahl
  - Aufbereitungseinheit: Einheit, für die Ergebnisse ausgewiesen werden
- Für die Güterbeurteilung ist der **Mean Square(d) Error (MSE)** relevant:  $MSE = E(Y - X)^2$  mit Y als erhobenem Wert und X als wahren Wert
- **Repräsentativität**: Das Ergebnis liegt hinreichend nahe am wahren Wert. Man wählt daher Stichproben, die nach bestimmten relevanten Strukturmerkmalen eine möglichst ähnliche Struktur wie die Grundgesamtheit aufweisen.

Gründe für Vollerhebungen

- nicht akzeptabler Informationsverlust bei einer Teilerhebung
- sachlich und/oder regional tief gegliederte Ergebnisse oder Ergebnisse für Minderheiten
- Auswahlgrundlage für Stichproben
- gesetzliche Vorschrift bei seltenen Ereignissen
- Erfordernis wegen technischer Funktionsfähigkeit (z.B. TÜV)

Gründe für Teilerhebungen:

- Einsparung von Kosten und Zeitaufwand
- höhere Sorgfalt, dadurch u.U. Ausgleich des Präzisionsverlusts
- Aktualität und Wirklichkeitsnähe
- bessere Kontrollmöglichkeiten
- technische Unmöglichkeit einer Vollerhebung
- geringere Belastung der Grundgesamtheit, dadurch höhere Akzeptanz
- Probeerhebungen

Auswahlverfahren

- Bei **nicht zufälligen Auswahlverfahren** hat nicht jede Einheit der Grundgesamtheit die Chance, in die Stichprobe zu gelangen. Für manche Fragestellungen sind aber bewusste Auswahlverfahren besser.
- Es können für nicht zufällige Verfahren zwar keine inferenzstatistischen Methoden angewandt werden, allerdings ist der Stichprobenzufallsfehler nur ein kleiner Teil aller Fehler.

- **willkürliche Auswahl**
  - Auswahl aufs Geratewohl, z.B. Straßenumfragen
  - self-selected samples, z.B. Internet-Befragungen
  - convenient sample (Bequemlichkeitsstichprobe)
- **bewusste Auswahl**: Auswahl erfolgt anhand eines bewussten Kriteriums
  - **Quotenverfahren**: Herbeiführung der Strukturgleichheit der Stichprobe durch verschiedene Quotierungsmerkmale. Vorgabe: Randhäufigkeiten oder gemeinsame Häufigkeiten.
    - Vorteil: einfache Realisation der Stichprobe, da leicht Ersatzprobanden gefunden werden können
  - Auswahl typischer Fälle, z.B. Preisstatistik, Pretest
  - Schnellballverfahren: Befragte liefern weitere Probanden.
  - Konzentrationsprinzip (**Cut-off-Verfahren**): Man erhebt nur bis zu einer Abschneidegrenze eines bestimmten Merkmals (z.B. Produktionsstatistik; typisches Merkmal: Umsatz)
  - Auswahl von Extremgruppen
  - Staffelungsmethode (Medianbetrachtung)

## 2. Einfache Zufallsstichproben

### 2.1 Charakterisierung einfacher Zufallsstichproben

#### Nomenklatur

- Variable in der Grundgesamtheit:  $x$
- Wert der  $v$ -ten Einheit in der Grundgesamtheit:  $X_v$ . Die **Grundgesamtheit** umfasst **N Einheiten**.
- **Stichprobe** als Zufallsvektor:  $s = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$  mit  $x_i$  als Variablenwert der  $i$ -ten Einheit in der Stichprobe. Der **Stichprobenumfang** beträgt **n Einheiten**.

#### Begriffe

- Ein **Stichprobenverfahren** ist die Kombination von Auswahl- und Schätzverfahren. Eine **Zufallsstichprobe** liegt vor, wenn jede Einheit der Grundgesamtheit in die Stichprobe gelangen kann. Man nennt einfache Zufallsstichproben auch uneingeschränkte Zufallsstichproben oder simple random sampling.
- **Stichprobenraum**: Menge aller möglichen Stichprobenrealisationen bzw. Stichproben. Im Modell ohne Zurücklegen ist der Stichprobenraum die Menge aller Teilmengen der Grundgesamtheit mit  $n$  Elementen oder eine Teilmenge davon, im Modell mit Zurücklegen gilt dies nicht.
- Das **Auswahlverfahren** (auch Erhebungsverfahren oder Stichprobenplan) ist die **Wahrscheinlichkeitsverteilung auf dem Stichprobenraum**. Bei einer einfachen Zufallsstichprobe treten alle Elemente des Stichprobenraums mit gleicher Wahrscheinlichkeit als Stichprobenrealisation auf.
- Ziel von Schätzverfahren ist der Schluss von der Stichprobe auf den zu schätzenden Parameter in der Grundgesamtheit.
- Eine **Stichprobenfunktion** (Statistik)  $t$  ist eine Zufallsvariable, die in Abhängigkeit vom Stichprobenzufallsvektor  $s$  definiert ist. Sie ist als Schätzfunktion geeignet, wenn sie einige wünschenswerte Eigenschaften besitzt.

#### wünschenswerte Eigenschaften von Stichprobenfunktionen

FS S.157-158

- **Erwartungstreue (Unverzerrtheit)**: Eine Stichprobenfunktion  $t$  bzw. ein Schätzer  $\hat{\theta}$  heißen erwartungstreu (unverzerrt, unbiased), wenn gilt:  $E(t) = E\hat{\theta} = \theta$ . Beispielsweise ist das Stichprobenmittel  $\bar{x}$  ein erwartungstreuer Schätzer für den Mittelwert in der Grundgesamtheit  $\mu$ .

- **Verzerrte Schätzer** können trotzdem besser als erwartungstreue Schätzer sein, nämlich dann, wenn ihre Varianz besonders klein ist. Verzerrung und Varianz werden über den Mean Squared Error gemeinsam betrachtet:  $MSE = E(t - \theta)^2 = \text{Var}(t) + (Bt)^2 = E(t - Et)^2 + (Et - \theta)^2$ . Der **MSE** ist daher die entscheidende Größe zur Beurteilung der Genauigkeit eines Schätzers.
- **Effizienz** (Wirksamkeit): Eine erwartungstreue Schätzfunktion ist effizienter als eine andere erwartungstreue Schätzfunktion, wenn sie die **kleinere Varianz** aufweist. Existiert ein erwartungstreuer Schätzer, der unter allen (unter gegebenen Bedingungen) möglichen erwartungstreuen Schätzern minimale Varianz aufweist, so nennt man ihn effizient.
- **Konsistenz**:
  - Eine Stichprobenfunktion  $t$  heißt **schwach konsistent**, wenn  $t$  mit wachsendem Stichprobenumfang  $n$  stochastisch gegen den zu schätzenden Parameter konvergiert, d.h. 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_{(n)} = \theta$$
  - Sie heißt **im quadratischen Mittel konvergent**, wenn der Erwartungswert der quadrierten Abweichung der Stichprobenfunktion vom wahren Parameter für wachsende  $n$  stochastisch gegen 0 konvergiert.
  - Eigenschaften und Zusammenhänge konsistenter Schätzer: Ein konsistenter und asymptotisch normalverteilter Schätzer ist asymptotisch effizient. Ein konsistenter Schätzer ist **asymptotisch erwartungstreu**.
- Suffizienz: Ein Schätzer heißt **suffizient**, wenn er alle Informationen enthält, die aus der Stichprobe über den tatsächlichen Parameter in der Grundgesamtheit zu bekommen sind.

## 2.2 Punktschätzung

FS S.159-161

Methoden zur Ermittlung von Schätzern

- **Methode der kleinsten Quadrate**
- **Momentenmethode**: Zur Schätzung eines Moments der Grundgesamtheit verwendet man das entsprechende Moment der Stichprobe als Schätzer.
- **Maximum-Likelihood-Methode**
  - Die Methode hat den Vorteil, dass sie (unter bestimmten Bedingungen) immer konsistente Schätzer liefert. Es wird der Parameter der Grundgesamtheit gesucht, bei dem die maximale Likelihood resultiert. Das Maximum der Likelihoodfunktion wird als Schätzer für  $\theta$  verwendet.
  - Im Gegensatz zur Dichtefunktion, die von bekannten Parametern ausgeht, gibt die Likelihoodfunktion Werte für den Parameter unter einem gegebenen Stichprobenvektor an.
  - Man spricht von Likelihood (Mutmaßlichkeit), da die **Normierung**, wie sie bei Wahrscheinlichkeiten oder der Dichtefunktion auftritt, **fehlt**.
  - Zur einfacheren Berechnung des Maximums wird üblicherweise die **Log-Likelihoodfunktion** als monotone Transformation der Likelihoodfunktion benutzt.

## Schätzer für die Varianz in der Grundgesamtheit $\sigma^2$

FS S.160-161

- Modell mit Zurücklegen
  - $s'^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ .  $s'^2$  ist sowohl Momenten- als auch ML-Schätzer für die Varianz.  
 $s'^2$  ist ein verzerrter Varianzschätzer, da  $E(s'^2) = \frac{n-1}{n} \sigma^2$ . Der Bias beträgt  $B(s'^2) = -\frac{1}{n} \sigma^2$ .
  - $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{n}{n-1} s'^2$ .  $s^2$  ist unverzerrt, da  $E(s^2) = \sigma^2$ .
  - Unter der Annahme normalverteilter Grundgesamtheiten besitzt  $s'^2$  den geringeren MSE bereits für Stichprobenumfänge  $n \geq 2$ . Er damit für alle sinnvollen Stichprobenumfänge  $s^2$  vorzuziehen.

- Modell ohne Zurücklegen

- $s^2$  ist im Modell ohne Zurücklegen nicht erwartungstreu, es gilt  $E(s^2) = \frac{N}{N-1} \sigma^2 = \sigma^{*2}$ . Der

Bias beträgt  $B(s^2) = \frac{1}{N-1} \sigma^2$  und ist dementsprechend in der Praxis (große

Grundgesamtheiten) äußerst gering. Korrigiert man  $s^2$  um einen Faktor, resultiert der erwartungstreue Schätzer  $\hat{\sigma}^2 = \frac{N-1}{N} s^2$  für  $\sigma^2$ .

- $s'^2$  ist auch im Modell ohne Zurücklegen verzerrt, es gilt:  $E(s'^2) = \frac{n-1}{n} \frac{N}{N-1} \sigma^2 = \frac{n-1}{n} \sigma^{*2}$ .

Der Bias von  $s'^2$  beträgt  $B(s'^2) = \frac{n-N}{n(N-1)} \sigma^2$ .

## 2.3 Konfidenzschätzung (Fehlerrechnung i.e.S.)

FS S.162-165

### Konfidenzschätzung

- Ziel der **Konfidenzschätzung** ist eine Zusatzinformation zur Punktschätzung, nämlich ein **Bereich**, in dem der wahre Wert mit ausreichender Wahrscheinlichkeit liegt. Demnach sollten ergänzend immer Konfidenzschätzungen vorgenommen werden.
- Der Schluss von Parametern der Grundgesamtheit auf Parameter der Stichprobe wird als **Inklusionsschluss** bezeichnet, hierbei ergibt sich ein **Prognoseintervall** zum gewählten Signifikanzniveau. Hingegen spricht man beim Schluss von Parametern der Stichprobe auf Parameter der Grundgesamtheit vom **Repräsentationsschluss**, man erhält ein **Konfidenzintervall**.
- Ein Konfidenzintervall wird **schmäler**, wenn c.p. der **Stichprobenumfang erhöht** wird. Die Präzision kann also durch  $n$  gesteuert werden. Der "Preis" einer **Erhöhung des Konfidenzniveaus** (unter sonst gleichen Bedingungen) ist eine **Verbreiterung** des Konfidenzintervalls.

### Ermittlung des notwendigen Stichprobenumfangs

- Die Ermittlung des **notwendigen Stichprobenumfangs** erfolgt auf der Basis einer vorgegebenen Präzision, d.h. dem gewünschten Konfidenzniveau und einem **absoluten Fehler  $e$** . Alternativ wird ein **relativer Fehler  $e_r$**  vorgegeben.
- Die für den Stichprobenumfang erforderlichen Berechnungen benötigen oft die zu schätzenden Größen. In diesem Fall sind diese **ungünstig zu schätzen**. Der Variationskoeffizient  $V$  wird z.B. über Vorerhebungen, Buchwerte oder Vergangenheitswerte geschätzt.

## 2.4 Hypothesenprüfung (Testen)

### Idee und Vorgehensweise

- Es steht eine **zu testende Hypothese** im Raum, die sog. **Nullhypothese**. Diese kann in Form einer **Punkthypothese** ( $H_0 : \mu = \mu_0$ ) oder einer **Bereichshypothese** (z.B.  $H_0 : \mu \leq \mu_0$ ) vorliegen. Die **Alternativhypothese** deckt jeweils gerade alle anderen möglichen Ausprägungen ab.
- Unter der Gültigkeit von  $H_0$  würde gelten:  $X \sim N(\mu_0; \sigma^2)$  und  $\bar{x} \sim N(\mu_0; \frac{\sigma^2}{n})$ . Der Stichprobenmittelwert einer realisierten Stichprobe wird mit dem vermuteten wahren Wert verglichen. Die Nullhypothese  $H_0$  kann verworfen werden, wenn der Stichprobenmittelwert auf einem gegebenen Signifikanzniveau außerhalb eines Prognoseintervalls um  $\mu_0$  liegt.

- Zur leichteren Ermittlung des **Ablehnungsbereichs** (kritischen Bereichs) der Nullhypothese wird die **Prüfgröße  $T \sim N(0;1)$**  herangezogen. Sie entspricht der standardisierten Differenz zwischen  $\bar{x}$  und  $\mu_0$ , wodurch der Ablehnungsbereich über Werte der Standardnormalverteilung eingesehen werden kann.
- Im Falle einer Punkthypothese (zweiseitiger Test) erfüllt der kritische Wert  $|t_c|$ , der die Grenzen des Annahmebereichs festlegt, die Beziehung  $\Psi(t_c) = 1 - \alpha/2$ , wobei  $\alpha$  das Signifikanzniveau darstellt. Beim Test einer Bereichshypothese ergibt sich ein einseitiger Ablehnungsbereich mit  $\Phi(t_c) = 1 - \alpha$  oder  $\Phi(t_c) = \alpha$  (je nachdem, auf welcher Seite aus inhaltlichen Gründen der Ablehnungsbereich liegen muss). Ein erhöhtes Signifikanzniveau vergrößert den Annahmebereich der Nullhypothese.
- Beim Testen von Bereichshypothesen wird die zur Vermutung gegenteilige Aussage getestet, um im Falle der Ablehnung von  $H_0$  einen stärkeren Beleg für die Gültigkeit der ursprünglichen Vermutung zu erhalten (analog zum Rechtsstaatsprinzip) – es sei denn, die Fragestellung gibt eine konkret zu testende Nullhypothese vor.
- Der **P-Wert** gibt das (empirische) **Signifikanzniveau** an, bei dem man bei gegebenem Stichprobenbefund die Nullhypothese gerade noch ablehnen würde.

#### Vergleich von Testverfahren

- Der **Fehler 1. Art  $\alpha$**  (auch **Risiko 1. Art**) gibt die Wahrscheinlichkeit an, eine richtige Nullhypothese fälschlicherweise abzulehnen.
- Der **Fehler 2. Art  $\beta$**  gibt die Wahrscheinlichkeit an, eine falsche Nullhypothese fälschlicherweise nicht abzulehnen (zu akzeptieren). Im Allgemeinen geht mit einem geringen  $\alpha$  ein hohes  $\beta$  einher.
- Die **Trennschärfe  $\gamma$**  ist das Gegenereignis zu  $\beta$ . Sie gibt die Wahrscheinlichkeit an, eine falsche Nullhypothese tatsächlich zu verwerfen.
- Die **Macht  $\pi(\theta)$**  (Gütefunktion) gibt die Wahrscheinlichkeit an, die Nullhypothese zu verwerfen (unabhängig davon, ob sie richtig oder falsch ist). Eine ideale Machtfunktion nimmt außer an der Stelle des wahren Parameters  $\theta_w$  für jeden Wert  $\theta_0$  immer den Wert 1 an.
- Die **Operationscharakteristik  $\omega(\theta)$**  gibt die Wahrscheinlichkeit an, die Nullhypothese nicht abzulehnen (unabhängig davon, ob sie richtig oder falsch ist) und ist daher das Gegenereignis zur Macht  $\pi$ .  $\omega$  ist idealerweise immer 0 und nimmt nur bei  $\theta_w$  den Wert 1 an. Es gilt:  $\pi(\theta) + \omega(\theta) = 1$ .

## 2.5 Technische Varianten der Zufallsauswahl

---

### technische Varianten der Zufallsauswahl

- Auswahl mit Hilfe von **Zufallszahlen**
  - echte Zufallszahlen
  - Zufallszahlengenerator (Nutzung eines Algorithmus, daher eigentlich nicht zufällig)
- **systematische Auswahl mit Zufallsstart**: es wird jede  $a$ -te Einheit ausgewählt ( $a = \frac{N}{n} = \frac{1}{f}$ ), die Starteinheit wird aus den ersten  $a$  Einheiten zufällig gewählt.
- **Anordnung** der Einheiten vor der systematischen Auswahl mit Zufallsstart
  - sektorale oder regionale Anordnung, z.B. nach Wirtschaftszweigen oder Postleitzahlen, sorgt tendenziell für einen positiven Schichtungseffekt (geringere Varianz)
  - Anordnung nach der Größe eines Merkmals
- Varianten mit **Ordnungsmerkmal**
  - Schlussziffernverfahren
  - Namensanfangsverfahren: Wahl aller Einheiten, deren Namen mit einem bestimmten Buchstaben anfangen
  - Geburtstagsauswahl

- Varianten mit **geographischem Bezug** (Ziel: möglichst geringer Erhebungsaufwand)
  - Punkstichprobe: Einheiten in räumlicher Nähe eines zufällig gewählten Punktes
  - Liniensichprobe
  - Routensichprobe
  - Flächensichprobe, z.B. Vollerhebung eines Straßenzugs

### 3. Höhere Stichprobenverfahren

Gründe für den Einsatz **höherer Stichprobenverfahren**

- Wichtigster Grund ist die **Erhöhung der Präzision der Schätzer** durch **Berücksichtigung von Zusatzinformationen**. Allgemein mögliche Verfahren zur Präzisionserhöhung sind die bereichskorrigierte Schätzung und Ersetzungsverfahren (z.B. Ausreißerbereinigung: Ausschluss von Stichproben, die die Extremwerte beinhalten).
- Schichtung wird durchgeführt, weil bei einer einfachen Zufallsstichprobe keine Ergebnisse für Teilgesamtheiten ausgewiesen werden können.
- Zusätzlich kann der Erhebungsaufwand (z.B. Reiseaufwand) reduziert werden.

#### 3.1 Gebundene Hochrechnungsverfahren

##### 3.1.1 Grundidee

Grundidee **gebundener Hochrechnungsverfahren**

- Basis ist eine einfache Zufallsstichprobe im Modell ohne Zurücklegen. Ziel ist es, **Zusatzinformationen in die Hochrechnung einzubringen**, um damit die Präzision der Schätzung (Hochrechnung) zu erhöhen.
- Dies geschieht über die **Berücksichtigung eines Hilfsmerkmals Y** mit bekannten  $Y_v$  für alle Elemente der Stichprobe. Typisches Hilfsmerkmal sind frühere Werte desselben Merkmals (z.B. Bevölkerungszahlen, Buchwerte oder Flächen der Vergangenheit).
- Bei der Modellierung wird angenommen, dass **ein mehr oder weniger linearer Zusammenhang** zwischen dem Erhebungsmerkmal  $x$  und dem Hilfsmerkmal  $y$  besteht:  $x = a + by$ . Falls  $a$  und  $b$  bekannt sind, gilt dann auch:  $\bar{X} = a + b\bar{Y}$  (**Schwerpunktseigenschaft**). Für den Fall, dass  $a$  und/oder  $b$  unbekannt sind, müssen die Parameter geschätzt werden, wobei drei Modellvarianten zum Einsatz kommen:
  - **Differenzschätzung**, falls  $a$  unbekannt und  $b$  bekannt
  - **Verhältnisschätzung**, falls  $a$  bekannt und  $b$  unbekannt
  - **Regressionsschätzung**, falls  $a$  und  $b$  unbekannt

##### 3.1.2 Differenzschätzung

Vorgehensweise und Eigenschaften

- Für **bekanntes b** gilt:  $a = \bar{X} - b\bar{Y}$ . Da **a unbekannt** ist, wird  $a$  über Werte aus der Stichprobe geschätzt:  $\hat{a} = \bar{x} - b\bar{y}$ . Der Differenzschätzer  $\hat{\bar{X}}_D$  ergibt sich nach folgender Formel:  

$$\hat{\bar{X}}_D = \hat{a} + b\bar{Y} = \bar{x} - b(\bar{y} - \bar{Y}).$$
- Der Wert der freien Hochrechnung wird also um die mit dem Faktor  $b$  gewichtete **Differenz** zwischen Stichprobenmittelwert des Hilfsmerkmals und Mittelwert des Hilfsmerkmals in der Grundgesamtheit korrigiert. In der Praxis wird **b häufig 1 gesetzt**.
- $\hat{\bar{X}}_D$  ist **erwartungstreu**.

### 3.1.3 Verhältnisschätzung

#### Vorgehensweise und Eigenschaften

- Bei der **Verhältnisschätzung** sei **a bekannt**, für das **unbekannte b** gilt:  $b = (\bar{X} - a) / \bar{Y}$ . b muss nun ebenfalls über die beiden Mittelwerte aus der Stichprobe geschätzt werden:  $\hat{b} = (\bar{x} - a) / \bar{y}$ .
- Der Verhältnisschätzer  $\hat{X}_V$  berechnet sich als  $\hat{X}_V = a + \hat{b}\bar{Y} = a + \frac{\bar{x} - a}{\bar{y}} \bar{Y}$ . In der Praxis nimmt man üblicherweise  $a = 0$  an (**durch Transformation immer erreichbar**). Dann vereinfacht sich die Berechnung des Verhältnisschätzers zu  $\hat{X}_V = \frac{\bar{x}}{\bar{y}} \bar{Y} = \bar{x} \frac{\bar{Y}}{\bar{y}}$ , d.h. die freie Hochrechnung wird mit dem **Quotienten** der beiden Mittelwerte des Hilfsmerkmals korrigiert.

### 3.1.4 Regressionsschätzung

#### Vorgehensweise und Eigenschaften

- Die **Regressionsschätzung** nimmt an, dass **a und b unbekannt** sind. Es gilt jedoch:  $\bar{X} = a + b\bar{Y}$ . a und b werden jetzt nach der Methode der kleinsten Quadrate aus den Stichprobenwerten geschätzt:  $\hat{b} = \frac{s_{xy}}{s_y^2}$  sowie  $\hat{a} = \bar{x} - \hat{b}\bar{y} = \bar{x} - \frac{s_{xy}}{s_y^2} \bar{y}$ .
- Der Regressionsschätzer  $\hat{X}_R$  ergibt sich als  $\hat{X}_R = \bar{x} - \frac{s_{xy}}{s_y^2} (\bar{y} - \bar{Y})$ . Er ist **nicht erwartungstreu**.
- Im Fall eines annähernd linearen Zusammenhangs zwischen dem Hilfsmerkmal y und dem Untersuchungsmerkmal x liefert der Regressionsschätzer für große Stichproben die besten Schätzwerte.

## 3.2 Geschichtete Stichproben (Schichtung)

---

### 3.2.1 Grundidee

#### Grundidee geschichteter Stichproben

- Ziel ist die **Einbringung von Zusatzinformationen** in das Auswahlverfahren, um eine höhere Präzision zu erreichen, z.B. durch Schichtung der BRD nach Bundesländern.
- Gründe für den Einsatz geschichteter Stichproben sind die **Verbesserung der Präzision** (am besten bei Schichten, die **in sich homogen** und **untereinander heterogen** sind), der Wunsch nach **Ergebnissen für einzelne Schichten** oder ziehungs- und erhebungstechnisch bedingte Schichtung.
- Der **Mittelwertschätzer bei geschichteten Stichproben** berechnet sich als  $\hat{X}_G = \bar{x}_G = \sum_{h=1}^L \frac{N_h}{N} \bar{x}_h$ .

Die Stichprobenmittelwerte jeder Schicht werden also mit dem Anteil der Schicht an der Grundgesamtheit gewichtet.

#### Gleichmäßige Aufteilung

- Eine **gleichmäßige Aufteilung** liegt vor, wenn aus jeder der L Schichten die **gleiche absolute Zahl von Elementen**  $n_h = n/L$  gezogen wird.
- Für diese Art der Aufteilung gilt die allgemeine Varianzformel. Sie beinhaltet in ihrer vollständigen Form die **Endlichkeitskorrektur**, die die Varianz für eine Vollerhebung auf 0 sinken lässt.



### 3.2.2 Proportionale Aufteilung

#### Proportionale Aufteilung

- Eine **proportionale Aufteilung** des Stichprobenumfangs liegt vor, wenn für alle Schichten ein **einheitlicher Auswahlssatz f** angewandt wird. Der Stichprobenumfang jeder Schicht verhält sich also proportional zur Anzahl der Einheiten in der Schicht.
- Die proportionale Aufteilung im Modell mit Zurücklegen liefert Schätzungen, deren Varianz höchstens so groß ist wie bei der einfachen Hochrechnung.
- Im Modell ohne Zurücklegen kann es passieren, dass die proportionale Aufteilung ungünstiger ist als eine einfache Stichprobe.

### 3.2.3 Optimale Aufteilung

#### Optimale Aufteilung

- Die optimale Aufteilung hat zum Ziel, den Stichprobenumfang so auf die einzelnen Schichten zu verteilen, dass die **Varianz des Mittelwertschätzers minimiert** wird. Der Stichprobenumfang für jede einzelne Schicht ergibt sich als  $n_h = n \frac{N_h S_h}{\sum_h N_h S_h}$ . Sind die **Varianzen  $S_h$  in allen Schichten identisch**, ist die proportionale Aufteilung gleichzeitig auch die optimale Aufteilung.
- Teilweise wird eine **kostenoptimale Aufteilung** angestrebt. Dazu müssen Informationen über das Totalbudget und über die Kosten der Erhebung einer Einheit in jeder Schicht vorliegen.
- Die **Wahl der optimalen Zahl von Schichten** gestaltet sich in der Praxis schwierig. Mit mehr Schichten kann tendenziell eher eine Homogenität einer Schicht erreicht werden. Allerdings nimmt der Präzisionsgewinn einer zusätzlichen Schicht überproportional ab. In der Praxis sind meist 5-6 Schichten vernünftig.

### 3.2.4 Varianzvergleiche

#### Vergleich der Varianzen bei den verschiedenen Möglichkeiten der Schichtung

- Verhalten sich die Varianzen in den Schichten antiproportional zu den Größenanteilen der Schichten, kann die Varianz bei proportionaler Aufteilung größer werden als bei gleichmäßiger Aufteilung.
- Nur für den genannten Fall, dass  $S_h$  in jeder Schicht gleich ist, ist die Varianz des Mittelwertschätzers für proportionale und optimale Aufteilung gleich, sonst ist die **optimale Aufteilung besser**. Die optimale Aufteilung ist also **bezüglich der Varianz nie schlechter** als die proportionale Aufteilung.
- Für den theoretischen Fall, dass  $N_h S_h$  in jeder Schicht gleich ist, ist die gleichmäßige Aufteilung die optimale Aufteilung. Die gleichmäßige Aufteilung kann aber keine geringere Varianz besitzen als die optimale Aufteilung.

## **3.3 Klumpenstichproben**

---

#### **Klumpenstichprobe** (cluster sampling)

- Die Grundgesamtheit wird in **Klumpen** zerlegt, wobei zwei- oder mehrstufig vorgegangen wird. Zunächst werden – bei der zweistufigen Vorgehensweise – als Primäreinheiten Klumpen durch eine einfache Zufallsstichprobe ausgewählt. Anschließend werden die **ausgewählten Klumpen** (Sekundäreinheiten) **in einer Vollerhebung** erfasst.
- Auf der letzten Stufe wird immer eine Vollerhebung durchgeführt.

- Klumpenstichproben sind interessant, wenn die Grundgesamtheit nicht vollständig erfasst ist. Zusätzlich spart man Kosten und Zeitaufwand.
- Die systematische **Auswahl** mit Zufallsstart ist faktisch eine Klumpenstichprobe, bei der die Klumpen über die Platzziffern definiert werden.
- In der Praxis sind eher **negative Klumpeneffekte** zu erwarten, da i.d.R. die Klumpen in sich **homogen** sind. Dies äußert sich in einer gegenüber der einfachen Hochrechnung u.U. höheren Varianz. Besonders heterogene Klumpen können die Varianz stark senken.
- Bei Klumpen unterschiedlicher Größe ist die Erwartungstreue nicht zwingend gegeben.

### 3.4 Mehrstufige Stichproben

---

mehrstufige Stichproben

- Im Gegensatz zur Klumpenstichprobe steht bei der **mehrstufigen Auswahl auf der letzten Stufe nur eine Zufallsauswahl**.
- Gründe für mehrstufiges Vorgehen
  - Der Aufwand bezüglich Kosten und Zeit ist geringer.
  - Es sind keine Vorinformationen für die gesamte Grundgesamtheit erforderlich.
  - Im Vergleich zur Klumpenstichprobe wird durch mehrstufige Stichproben tendenziell dem Klumpeneffekt entgegengewirkt.
- Eine Schichtung ist eine Vollausswahl auf der ersten Stufe und eine Zufallsauswahl auf der zweiten Stufe. Die **Schichtung** ist also prinzipiell nur ein **Spezialfall** der mehrstufigen Stichprobe.

### 3.5 Stichproben mit variierender Auswahlwahrscheinlichkeit

---

Stichproben mit **variierender Auswahlwahrscheinlichkeit**

- Bei der optimalen Schichtung wird die Streuung in einer Schicht durch verschiedene Stichprobenumfänge normiert. Daher haben Einheiten verschiedener Schichten mit verschiedener Streuung eine unterschiedliche Auswahlwahrscheinlichkeit.
- Grundsätzlich kann für jede Einheit eine **individuelle Auswahlwahrscheinlichkeit**  $P_v$  festgelegt werden. Auch hier ist die Präzisionserhöhung das Motiv.
- Als Schätzer im Modell mit Zurücklegen wird der **Hansen-Hurwitz-Schätzer**

(Mittelwertschätzer) eingesetzt:  $\hat{X}_{HH} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{Np_i}$ . Er ist erwartungstreu.

- Um eine möglichst kleine Varianz des Hansen-Hurwitz-Schätzers zu erreichen, wird das so genannte **pps-Verfahren** (probability proportional to size) genutzt, das **größenproportionale Auswahlwahrscheinlichkeiten**  $P_v = \frac{X_v}{X}$  vorschlägt. Die Varianz bei diesem Verfahren ist 0.

Dieses Verfahren ist aber nur anwendbar, wenn für alle Einheiten der Grundgesamtheit ein bestimmtes Merkmal  $X$  bekannt ist.

- In der Praxis greift man auf bekannte Merkmale zurück, die mit  $X$  möglichst hoch korreliert sind. Dann ergeben sich **näherungsweise größenproportionale Auswahlwahrscheinlichkeiten**. Übliche **Hilfsmerkmale** sind z.B. Betriebsgröße, Werte aus der jüngeren Vergangenheit oder im Auditing-Bereich Buchwerte.
- Im **Modell ohne Zurücklegen** tritt die Problematik auf, dass die Auswahlwahrscheinlichkeiten zwischen den einzelnen Zügen variieren. Man benötigt daher größenproportionale **Inklusionswahrscheinlichkeiten**  $\pi_v$ , d.h. die Wahrscheinlichkeit muss insgesamt (über alle Züge) größenproportional sein.

**technische Realisation** der variierenden Auswahlwahrscheinlichkeiten

- In der Praxis kommt häufig die **Monetary Unit Auswahl** zum Einsatz: Jeder Geldeinheit wird eine Nummer zugewiesen. Die Monetary Unit Auswahl ist einfach zu realisieren, da die Nummern per Zufallsgenerator gezogen werden können.
- Theoretisch sind **einfache Urnenmodelle** denkbar, bei der für jede Einheit entsprechend ihrer Größe Zettel oder Kugeln in die Urne kommen.
- Eine Verbindung von systematischer Auswahl mit Zufallsstart und Monetary Unit Auswahl kann maximalen Präzisionsgewinn bringen.